

Обратите внимание: в этом вопроснике есть специальные инструкции. Отвечайте на вопросы, следуя этим инструкциям.

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות. יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

Математика

5 единиц обучения – первый вопросник

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

Указания

а. Продолжительность экзамена: 4 часа 15 минут.

א. משך הבחינה: ארבע שעות ורבע.

б. Строение вопросника и ключ к оценке:

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

В этом вопроснике три раздела, и в них восемь вопросов.

בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

Раздел первый – алгебра и теория вероятности

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

Раздел второй – геометрия и тригонометрия на плоскости

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

Раздел третий – дифференциальное и интегральное

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

исчисление полиномов, функций, содержащих корни,

של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות

рациональных функций и тригонометрических функций

רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

Вы должны ответить на четыре вопроса, по меньшей мере

יש לענות על ארבע שאלות, לפחות על שאלה

на один вопрос из каждого раздела – $4 \times 25 = 100$ баллов.

אחת מכל פרק – $25 \times 4 = 100$ נקודות.

в. Разрешенный вспомогательный материал:

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, который предоставляет возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש

באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו

אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי

או באפשרויות התכנות במחשבון עלול

לגרום לפסילת הבחינה.

2. דפי נוסחאות (מצורפים).

3. מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

2. Листы с формулами (прилагаются).

3. Двухязычный словарь.

г. Особые указания:

ד. הוראות מיוחדות:

1. Не переписывайте вопрос; обозначьте только его номер.

1. אין להעתיק את השאלה;

יש לסמן את מספרה בלבד.

2. Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы.

2. יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.

Запишите в тетради этапы решения (также и в том

יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון,

случае, когда вычисления производились с помощью

גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת

калькулятора). Объясните все свои действия,

מחשבון. יש להסביר את כל הפעולות, כולל

включая вычисления, подробно, ясно и по порядку.

חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

Недостаточно подробная запись решения может

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או

привести к тому, что оценка за экзамен будет снижена

לפסילת הבחינה.

или экзамен будет аннулирован.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טיוטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

Вопросы

Ответьте на четыре из вопросов 1–8, по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела (за каждый вопрос – 25 баллов).

Обратите внимание: если вы ответите более чем на четыре вопроса, будут проверены только первые четыре из ответов в вашей тетради.

Раздел первый – алгебра и теория вероятности

1. Надав и Йоси в 8:00 вышли на прогулку по одному и тому же маршруту (смотрите чертеж).



Йоси шел с начала маршрута и до его конца с постоянной скоростью и без остановок.

Надав прошел 1.8 км с начала маршрута с постоянной скоростью, после чего он решил вернуться в начало маршрута.

На обратном пути Надав шел со скоростью, которая была в 1.5 раз больше начальной скорости его ходьбы.

Когда Надав вернулся в начало маршрута, Йоси находился на расстоянии 4.8 км от начала маршрута.

Обозначим через v км/ч начальную скорость Надава.

(*) Выразите с помощью v скорость ходьбы Йоси.

На расстоянии 3.5 км от конца маршрута расположен бассейн.

После того как Надав вернулся в начало маршрута, он снова вышел на прогулку по тому же маршруту.

Он шел со скоростью $(v + 2)$ км/ч в течение t часов и дошел до бассейна.

Когда Надав дошел до бассейна, Йоси дошел до конца маршрута.

(**) Выразите t при помощи v .

Надав дошел до бассейна в 15:30.

(*) Найдите v , если известно, что v больше 1 км/ч.

2. Дана геометрическая прогрессия, в которой $2n + 1$ членов (n – натуральное число). Все члены прогрессии $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n+1}$ являются положительными.

Сумма членов прогрессии без двух ее первых членов в 4 раза больше суммы членов прогрессии без двух ее последних членов.

Дано, что сумма членов, которые располагаются после среднего члена, в 256 раз больше суммы членов, которые располагаются перед средним членом.

(к) Найдите n .

Данную прогрессию продолжили, так что образовалась бесконечная геометрическая прогрессия.

Дано: B – это бесконечная прогрессия, в которой для каждого натурального k выполняется

$$b_k = \frac{1}{(a_k + a_{k+1})^2}.$$

(а) Докажите, что прогрессия B – геометрическая прогрессия, и найдите ее знаменатель.

В прогрессии B умножают на 2 каждый член прогрессии с четным номером.

Дано, что после умножения сумма членов прогрессии с нечетными номерами стала на $\frac{1}{30}$ больше суммы членов прогрессии с четными номерами.

(б) Найдите a_1 .

3. В исследовании, которое проводилось среди учащихся некоторой школы, проверили связь между участием в молодежном движении и волонтерством.

80% участников молодежного движения занимаются волонтерством.

Случайным образом выбирают 5 из учеников, которые участвуют в молодежном движении (выбор с возвращением).

(к) Какова вероятность того, что выбрали по меньшей мере одного ученика, который занимается волонтерством, и по меньшей мере одного ученика, который не занимается волонтерством?

Дано, что 55% учеников не участвуют в молодежном движении и не занимаются волонтерством, а $\frac{1}{12}$ учеников, которые не участвуют в молодежном движении, занимаются волонтерством.

(а) Сколько процентов учеников участвуют в молодежном движении?

В исследовании приняло участие в общей сложности 100 учеников.

(б) Сколько учеников участвуют в молодежном движении, но не занимаются волонтерством?

(в) Случайным образом выбирают 3 из учеников, которые не занимаются волонтерством (выбор без возвращения).

(1) Какова вероятность того, что первый выбранный ученик участвует в молодежном движении, а два ученика, которые были выбраны после него, не участвуют в молодежном движении?

(2) Какова вероятность того, что один из выбранных учеников участвует в молодежном движении, а два других не участвуют в молодежном движении, если известно, что первый выбранный ученик не участвует в молодежном движении?

Раздел второй – геометрия и тригонометрия на плоскости

4. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O , так что AB – диаметр окружности.

Точка E лежит на стороне BC , а точка F лежит на отрезке BO , как показано на чертеже.

Дано, что четырехугольник $CEFO$ может быть вписан в окружность.

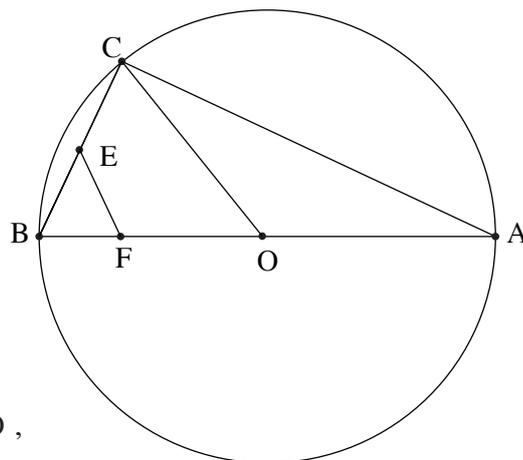
- (а) Докажите: $EF = EB$.

Окружность, которая описывает четырехугольник $CEFO$, пересекает сторону AC в точке D , так что ED параллелен AB .

- (б) (1) Докажите, что четырехугольник $EDOB$ – это параллелограмм.
 (2) Докажите: $OD \perp AC$.

Прямая ℓ – касательная в точке C к окружности, описанной вокруг треугольника ABC .

- (в) Докажите, что прямая ℓ является касательной к окружности, описанной вокруг четырехугольника $CEFO$.



5. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O и радиусом R .

Точка D – это середина малой дуги BC , как показано на чертеже.

Дано: $\sphericalangle ABC = 60^\circ$.

Обозначим: $\sphericalangle BAC = \alpha$.

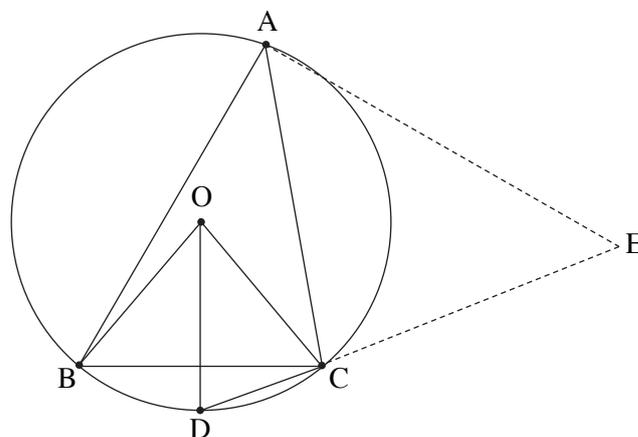
- (а) Выразите при помощи R и α площади треугольников ABC и ODC .

Дано, что отношение площади треугольника ABC к площади треугольника ODC равно $2\sqrt{3} \sin(80^\circ)$.

- (б) Найдите значение α .

Точка E – такая точка на продолжении хорды DC , что $\sphericalangle CAE = 50^\circ$, как показано на чертеже.

- (в) Выразите при помощи R радиус окружности, вписанной в треугольник ACE .



Раздел третий – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций

6. Дана функция: $f(x) = \frac{x-1}{(x-a)^3}$, определенная в области $x \neq a$, a – параметр, не равный 0.

(а) Ответьте на вопросы подпунктов (1)–(2). При необходимости выразите свои ответы при помощи a .

(1) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных осям координат.

(2) Найдите координаты точки пересечения графика функции $f(x)$ с осью y .

(б) Найдите, для каких значений a у функции $f(x)$ есть точка экстремума, которая находится слева от перпендикулярной к оси x асимптоты, и определите тип экстремума.

Графики 1–4 в конце вопроса описывают функцию $f(x)$ для различных значений a .

(а) Найдите график, соответствующий каждому из значений a (I–IV), и обоснуйте свой ответ.

I. $a = -1$

II. $a = 0.5$

III. $a = 1$

IV. $a = 2$

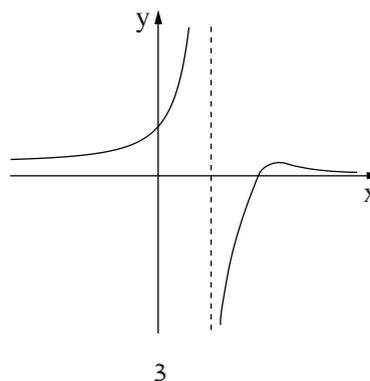
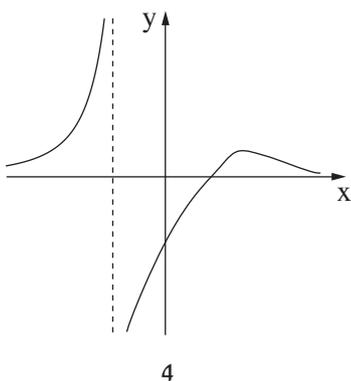
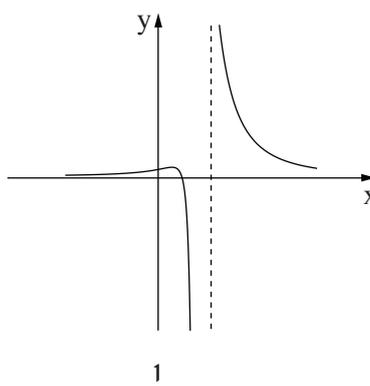
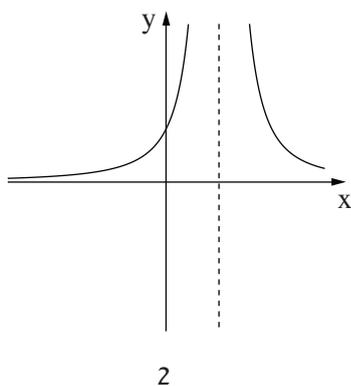
Дана функция $g(x)$, для которой выполняется $g(x) = f(x) - b$ для значения a , соответствующего графику 2.

b – положительный параметр.

Одна из точек пересечения графика функции $g(x)$ с осью x – это $(t, 0)$, $1 < t < 5$.

Дано, что площадь фигуры, заключенной между графиком функции $g(x)$, горизонтальной асимптотой функции $g(x)$, прямой $x = t$ и прямой $x = 5$, равна 1.75.

(б) Найдите значение b .



7. Дана функция $f(x) = (b + \cos x) \sin x$, определенная в области $-\pi \leq x \leq \pi$, b – параметр.

(а) Функция $f(x)$ четная или нечетная? Обоснуйте свой ответ.

Дано, что у графика функции $f(x)$ есть в точности три точки пересечения с осью x .

(а) Ниже приведены три возможных значения b , I–III.

Определите, какое из этих значений соответствует функции $f(x)$, и обоснуйте свой ответ.

I. $b = 0$ II. $0 < b < 1$ III. $1 \leq b$

Дано, что угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)$ при $\cos x = \frac{1}{4}$ равен $\left(-\frac{5}{8}\right)$.

(а) Найдите значение b .

Подставьте $b = 1$ в функцию $f(x)$ и ответьте на вопросы пунктов (г)–(и).

(г) Найдите координаты точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип.

(и) (1) Начертите схематический график функции $f(x)$.

(2) Начертите схематический график производной $f'(x)$.

Дана функция $g(x)$, для которой $g(x) = (f(x))^2 \cdot f'(x)$. Функция $g(x)$ определена в области $0 \leq x \leq \pi$.

(и) Вычислите площадь фигуры в первом квадранте, ограниченной графиком функции $g(x)$ и осью x .

8. Дана функция $f(x) = \sqrt{x}$, определенная в области $x \geq 0$, и дана функция $g(x) = \frac{16}{x^2 + 3}$, определенная для любого x .

(а) (1) Найдите координаты точки экстремума функции $g(x)$ и определите ее тип.

(2) Найдите координаты точек перегиба функции $g(x)$.

(3) Начертите в одной системе координат схематические графики функций $f(x)$ и $g(x)$.

В точке $C(t, 0)$ проводят перпендикуляр к оси x , $t > 0$.

Этот перпендикуляр пересекает график функции $f(x)$ в точке A , а график функции $g(x)$ в точке B .

(а) Выразите при помощи t произведение длин отрезков AC и BC .

(а) Докажите, что произведение длин отрезков AC и BC является максимальным, когда точка B является точкой перегиба функции $g(x)$.

Дана функция $k(x) = \frac{8\sqrt{x-4}}{(x-4)^2 + 3}$, определенная в области $x \geq 4$.

(г) Воспользуйтесь предыдущими пунктами этого вопроса. Найдите координаты точки внутреннего экстремума функции $k(x)$ и определите ее тип. Обоснуйте свой ответ.

Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
Копировать или публиковать можно только
с разрешения Министерства просвещения.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
אין להעתיק או לפרסם
אלא ברשות משרד החינוך.